ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 7
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 7

Milan S. Popadić

GENERALIZACIJA JEDNOG KARAMATINOG PROBLEMA O JEDNOJ VRSTI NIZOVA

Milan S. Popadić

GENERALISATION OF A PROBLEM OF J. KARAMATA ON A KIND OF SEQUECES

Skopje — Skopje
1950

MILAN S. POPADIĆ

GENERALIZACIJA JEDNOG KARAMATINOG PROBLEMA O JEDNOJ VRSTI NIZOVA

U Vesniku Društva matematičara i fizičara NR Srbije [I, 3—4 (1949), *str.* 155—156] *profesor* J. Karamata *postavio je zadatak* (*br.* 12) *koji sadrži sve tačke teoreme dokazane u ovom članku, samo za specijalan slučaj* k = 2. *Prema tome, ovaj članak pretstavlja jedno uopštenje problema postavljenog u pomenutom časopisu.*

1. *Definicija niza* (k). — Neka je k proizvoljan prirodan broj. Izvršimo u nizu prirodnih brojeva permutaciju tako, da počevši od prvog iza svakog broja stavimo k puta veći, a zatim preostali naredni broj. Na primer, ako je $k=3$, onda iza prvoga člana prirodng niza, tj. iza 1, treba staviti $3=1\cdot 3$, a zatim broj 2. Dalje iza 2 doći će $6=2\cdot 3$, pa broj 4 itd., te će se dobiti niz:

$$1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 12,\ 5,\ 15,\ 7,\ 21,\ 8,\ 24,\ \ldots$$

U opštem slučaju odgovarajući niz bi izgledao:

$$1,\ k,\ 2,\ 2k,\ 3,\ 3k,\ \ldots,\ k-1,\ (k-1)k,\ k+1,\ (k+1)k,\ \ldots$$

Nizom (k) nazvaćemo niz obrazovan od članova neparnog ranga poslednjeg niza, tj. niz

$$(k) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k-2,\ k-1,\ k+1,\ k+2,\ \ldots$$

Na primer niz (k) je za $k=3$:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

Pre svega biće dokazana sledeća lema:

Lema 1.— *Opšti član niza* (k) *je oblika*

(1) $$a=(kl-p)\,k^{2r},$$

gde je

$$l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad p=1,\ 2,\ \ldots\ k-1;\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Dokaz.— Prema definiciji niza (k), od prirodnih brojeva samo brojevi oblika ka ne pripadaju njemu. Prema tome niz prirodnih brojeva može se rastaviti na dva niza čiji su opšti članovi a (članovi niza (k)) i ka. Pokazaćemo matematičkom indukcijom da je (1) opšti član niza (k). Doista za $r=0$ (1) se svodi na

(2) $$kl-p.$$

S obzirom na značenje broja p, brojevi $kl-p$ i k su relativno prosti. Odavde sleduje da (2) ne može biti oblika ka, te da mora pripadati nizu (k).— Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno i za $r=s$, tj. da je

$$a=(kl-p)\,k^{2s}$$

član niza (k). Tada je istii slučaj i sa izrazom

$$(kl-p)\,k^{2(s+1)}=k^2 a$$

Doista ako ovaj izraz ne bi bio član niza (k), onda bi bio oblika ka', gde je a' neki član niza (k). Ali kako bi tada bilo $a'=ka$, sledovalo bi da a' nije član niza (k). Iz ove protivrečnosti sleduje da je i $(kl-p)\,k^{2(s+1)}$ član niza (k), pa dakle i tačnost same leme.

Iz samog izlaganja izlazi da se opšti član niza (k) može definisati izrazom

$$a=qk^{2s},\qquad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

pri čemu je q proizvoljan prirodan broj koji zadovoljava relaciju $(q,k)=1$.

Dokazaćemo sada sledeći stav:

Lema 2.— Brojevi l, p, r su jednoznačno određeni za svaki dati član niza (k).

Dokaz. Neka je dat opšti član niza (k), tj. neka je

$$a=(kl-p)\,k^{2r}.$$

Pretpostavimo da postoje dva sistema rešenja l_1, p_1, r_1 i l_2, p_2, r_2.

Tada treba da je

$$(kl_1 - p_1)\, k^{2r_1} = (kl_2 - p_2)\, k^{2r_2}. \tag{3}$$

Pošto se svaki prirodan broj može rastaviti na jedan jedini način na proste faktore, i s obzirom da je $(kl_1 - p_1,\ k) = 1$ i $(kl_2 - p_2, k) = 1$ — sleduje

$$k^{2r_1} = k^{2r_2},$$

odakle

$$r_1 = r_2.$$

Relacija (3) se svodi tada na

$$kl_1 - p_1 = kl_2 - p_2,$$

odnosno

$$p_2 - p_1 = k\,(l_2 - l_1). \tag{4}$$

Ova relacija je međutim zadovoljeno samo u slučaju kada je $p_2 = p_1$ i $l_2 = l_1$. Jer ako je $|l_2 - l_1| \neq 0$, tada je uvek $k\,|l_2 - l_1| > k > |p_2 - p_1|$, odnosno $k\,|l_2 - l_1| > |p_2 - p_1|$ pošto je $k > p_1$ i $k > p_2$. Međutim ova nejednakost protivreči jednakosti (4). Dakle doista je $l_1 = l_2$ i $p_1 = p_2$ — čime je lema dokazana.

Napomenimo da se efektivno izračunavanje brojeva l, p, r, za dati član niza, može lako izvršiti.

2. Označimo sa $K(x)$ broj članova niza (k) koji nisu veći od x, a sa $[x]$, kao i obično, najveći ceo broj koji nije veći od x. Sada ćemo dakazati sledeći stav:

Teorema.— 1. Za broj članova niza (k) *važe sledeće formule:*

$$K(x) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right], \tag{5}$$

$$K(x) = \sum_{m \geqslant 0} (-1)^m \left[\frac{x}{k^m}\right], \tag{6}$$

$$K(x) = \frac{k}{k+1}\, x + O(\log x), \qquad x \to \infty. \tag{7}$$

2. *Ako se sa* a_n *obeleži* n*-ti član niza* (k), *tada je*

$$a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \qquad n \to \infty. \tag{8}$$

3. *Neka je prirodan broj* n *napisan u brojnom sistemu od* k *cifara — dakle neka je*

$$n = \sum_{l=0}^{r} k^l c_l,$$

gde svaki od simbola c_l ($l = 0, 1, 2, \ldots, r$) *pretstavlja neki od brojeva* $0, 1, 2, \ldots, k-1$; *tada važi formula*

$$K(n) = \frac{k}{k+1} n + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{r} (-1)^l c_l. \tag{9}$$

Dokaz.— Iz leme 2 neposredno sleduje da je broj članova niza (k) koji nisu veći od x, jednak broju sistema l, p, r koji zadovoljavaju relaciju

$$(kl - p)\, k^{2r} \leqslant x. \tag{10}$$

Iz ove relacije dobija se, za određene vrednosti $p = m$ i $r = n$,

$$l \leqslant \frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}.$$

Prema tome l može imati jednu od sledećih vrednosti:

$$1, 2, 3, \ldots, l_{nm},$$

gde je

$$l_{nm} = \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

Dakle broj rešenja nejednačine (10) za $p = m$ i $r = n$ jeste l_{nm}. Stavljajući u poslednjoj formuli $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $m = 1, 2, \ldots, k-1$ i sabirajući sve tako dobijene izraze, dobija se za broj svih rešenja nejednačine (10), pa dakle i za $K(x)$:

$$K(x) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

Ovo je međutim formula (5), čiju je tačnost trebalo dokazati. Jasno je da je za konačno x broj sabiraka u zbiru s desne strane znaka jednakosti takođe konačan. Doista iz nejednačine

$$\frac{x}{k^{2n+1}} < \frac{1}{k} \tag{11}$$

sleduje

$$\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} < \frac{m+1}{k} \leqslant 1,$$

a odavde, za svako n koje zadovoljava nejednačinu (11),

$$\left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}\right] = 0.$$

Dakle prema (11) dovoljno je (ali ne i nužno) da je u ovom slučaju

$$n > \left[\frac{\log x}{2 \log k}\right].$$

Sada ćemo preći na dokaz formule (6).

Broj svih brojeva koji nisu veći od x, a deljivi su brojem a, jeste

$$\left[\frac{x}{a}\right]. \tag{12}$$

Na osnovu leme 1 svaki broj niza (k) oblika je

$$q k^{2r} \tag{13}$$

gde je q proizvoljan prirodan broj za koji važi relacija $(q, k) = 1$, a $r = 0, 1, 2, \ldots$. Tada brojevi oblika

$$q k^{2r+1}$$

ne pripadaju nizu (k). Broj brojeva koji nisu veći od x a deljivi su sa k^{2r}, odnosno sa k^{2r+1}, na osnovu (12) jeste

$$\left[\frac{x}{k^{2r}}\right] \quad \text{odnosno} \quad \left[\frac{x}{k^{2r+1}}\right].$$

Kako su brojevi deljivi sa k^{2r+1} deljivi i sa k^{2r}, broj brojeva oblika (13), za određenu vrednost $r=n$, je

$$\left[\frac{x}{k^{2n}}\right]-\left[\frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

Stavljajući ovde $n=0, 1, 2, \ldots$ i sabirajući tako dobijene izraze, dobija se za broj svih brojeva oblika (13) koji nisu veći od x tj. za $K(x)$:

$$K(x)=\sum_{n\geqslant 0}\left(\left[\frac{x}{k^{2n}}\right]-\left[\frac{x}{k^{2n+1}}\right]\right)$$

odnosno

$$K(x)=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left[\frac{x}{k^m}\right],$$

sto pretstavlja formulu (6). Jasno je da je i u ovom slučaju broj sabiraka u poslednjoj formuli konačan. Krajnji sabirak različit od nule je oblika

$$(-1)^s\left[\frac{x}{k^s}\right]$$

gde je

(14) $$s=\left[\frac{\log x}{\log k}\right],$$

što se lako proverava.

Kako je

$$\left[\frac{x}{k^m}\right]=\frac{x}{k^m}-\delta_m, \qquad 0\leqslant\delta_m<1$$

tada se iz (6) dobija

(15) $$K(x)=\sum_{m=0}^{s}(-1)^m\frac{x}{k^m}+\sum_{m=0}^{s}(-1)^{m+1}\delta_m.$$

Prvi zbir pretstavlja zbir konačne geometriske progresije te je

$$\sum_{m=0}^{s}(-1)^m\frac{x}{k^m}=x\,\frac{1-\left(-\dfrac{1}{k}\right)^{s+1}}{1+\dfrac{1}{k}}.$$

Za drugi zbir se dobija

$$0 \leqslant \sum_{m=0}^{s} (-1)^m \, \delta_m \leqslant \sum_{m=0}^{s} \delta_m < s+1.$$

Zamenjujući ove izraze u (15), imamo

$$K(x) = \frac{k - \left(-\frac{1}{k}\right)^{s+1}}{k+1} x + \theta (s+1), \qquad 0 \leqslant \theta < 1. \tag{16}$$

S obzirom na (14) dobija se

$$\theta \left(\left[\frac{\log x}{\log k} \right] + 1 \right) \sim \theta \frac{\log x}{\log k} = O(\log x), \qquad x \to \infty.$$

Pošto prema (14) $s \to \infty$ kada $x \to \infty$, iz (16) izlazi

$$K(x) = \frac{k}{k+1} x + O(\log x), \qquad x \to \infty,$$

što pretstavlja formulu (7). Na ovaj način je prva tačka teoreme dokazana u potpunosti. Napomenimo samo da iz (7) neposredno sleduje formula

$$K(x) \sim \frac{k}{k+1} x, \qquad x \to \infty,$$

koja izražava da brojevi niza (k) sačinjavaju $k/(k+1)$ deo brojeva prirodnog niza, ili da ja njihova asimptotska gustina $k/(k+1)$.

Ako je a_n n-ti član niza (k), onda je prema poslednjoj formuli

$$K(a_n) \sim \frac{k}{k+1} a_n, \qquad n \to \infty.$$

Međutim prema definiciji $K(x)$ sleduje $K(a_n) = n$. Iz poslednje dve relacije dobija se

$$a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \qquad n \to \infty,$$

što pretstavlja formulu (8).

Najzad preći ćemo na dokaz poslednje tačke.
Stavimo $x = n$, gde je

$$n = c_0 + kc_1 + k^2 c_2 + \cdots + k^r c_r, \tag{17}$$

u formulu (6). Pre no što izvršimo smenu izračunajmo koliko je $\left[\frac{n}{k^m}\right]$. Dobija se

$$\frac{n}{k^m} = \frac{c_0}{k^m} + \frac{c_1}{k^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{k} + c_m + kc_{m+1} + \cdots + k^{r-m} c_r.$$

Kako je

$$\frac{c_0}{k^m} + \frac{c_1}{k^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{k} \leqslant \frac{k-1}{k^m} + \frac{k-1}{k^{m-1}} + \cdots + \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k^m} < 1$$

(pošto c_i može biti samo jedan od brojeva $0, 1, 2, \ldots, k-1$), imamo

$$\left[\frac{n}{k^m}\right] = c_m + kc_{m+1} + \cdots + k^{r-m} c_r.$$

Stavljajući $m = 0, 1, 2, \ldots, r$, dobija se iz (6):

$$\begin{aligned}
K(n) = c_0 + kc_1 + k^2 c_2 + \cdots &+ k^l c_l + \cdots + k^r c_r - \\
- c_1 - kc_2 - \cdots &- k^{l-1} c_l - \cdots - k^{r-1} c_r + \\
+ c_2 + \cdots &+ k^{l-2} c_l + \cdots + k^{r-2} c_r - \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (-1)^l c_l + \cdots + (-1)^l k^{r-l} c_r + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ (-1)^r c_r.
\end{aligned}$$

Kada se izvrši sabiranje sličnih sabiraka, koeficijenat člana koji sadrži c_l biće

$$k^l - k^{l-1} + k^{l-2} - \cdots + (-1)^l = \frac{k^{l+1} + (-1)^l}{k+1} = \frac{k\,k^l + (-1)^l}{k+1}.$$

Prema tome je

$$K(n) = \sum_{l=0}^{r} \frac{k\, k^l + (-1)^l}{k+1}\, c_l = \frac{k}{k+1} \sum_{l=0}^{r} k^l\, c_l + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{r} (-1)^l\, c_l\, .$$

Odavde, s obzirom na (17), sleduje

$$K(n) = \frac{k}{k+1}\, n + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{r} (-1)^l\, c_l\, ,$$

što je i trebalo dokazati.

M. S. Popadić

GENERALISATION OF A PROBLEM OF J. KARAMATA ON A KIND OF SEQUENCES

(Summary)

A generalisation is given of the problem proposed by J. Karamata in the *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie* [I, 3—4 (1949), p. 155—156].

Definition of the sequence (k). k being a natural number, let us perform in the sequence of natural numbers the following permutation: we put after the first term, namely after 1, the k-times greater number, then the next remained term of the sequence and after this number again the k-times greater one and so on. So we obtain for $k=3$, for instance, the following sequence (k):

$$1,\ 3,\quad 2,\ 6,\quad 4,\ 12,\quad 5,\ 15,\quad 7,\ 21,\quad 8,\ 24,\ \ldots$$

In general we have

$$1,\ k,\quad 2k,\ \ldots,\ k-1,\quad (k-1)k,\quad k+1,\quad (k+1)k,\ \ldots$$

A sequence formed with all terms of odd rank of the last sequence, i. e.

$$1,\ 2.\ 3,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,$$

is called the sequence (k).

It is easy to prove the following two lemmas:

Lemma 1. *The general term of the sequence* (k) *is*

$$a = (kl - p)\, k^{2r}$$

where

$$l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1;\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Lemma 2. The numbers l, p, r, are uniquely determined for every term of the sequence (k).

Let $K(x)$ denotes the number of all terms of the sequence (k) not exceeding x. Then the following theorem can be proved:

Theorem. 1. *For the number of terms of the sequence* (k) *we have:*

(1) $$K(x)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m=1}^{k-1}\left[\frac{m}{k}+\frac{x}{k^{2n+1}}\right],$$

(2) $$K(x)=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left[\frac{x}{k^m}\right],$$

(3) $$K(x)=\frac{k}{k+1}x+O(\log x), \qquad x\to\infty.$$

2. *If we denote by a_n the n-th term of the sequence* (k), *then we have*

(4) $$a_n\sim\frac{k+1}{k}n, \qquad n\to\infty.$$

3. *Let n be a natural number written in the number system of k digits,*

(5) $$n=\sum_{l=0}^{r}k^l c_l,$$

where each of the letters c_l $(l=0.\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ *represents one of the numbers* $0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ k-1$; *then we have*

(6) $$K(n)=\frac{k}{k+1}n+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l c_l.$$

We are now going to show the main points of the proof.

From the lemmas 1 and 2 it follows at once that the number of terms of the sequence (k), not exceeding x, is equal to the number of system l, p, r, satisfying the relation

(7) $$(kl-p)\,k^{2r}\leqslant x.$$

Hence

$$l\leqslant\frac{p}{k}+\frac{x}{k^{2r}},$$

whence follows that l can have

$$l_{mn} = \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n}}\right]$$

values, for definite values of $p=m$ and $r=n$. By summing up for $m=1, 2, \ldots, k-1$ and $n=0, 1, 2, \ldots$, we obtain for the number of systems l, p, r, and thus for $K(x)$, the formula (1). It is easy to show that the number of terms of the sum in this formula is finite for finite value of x.

To deduce the formula (2) it must be observed that the number of the numbers not exceeding x, divisible by a, is $\left[\frac{x}{a}\right]$.

Since the terms of the sequence (k) are of the form

$$qk^{2r}, \tag{8}$$

with $(q, k)=1$ (lemma 1), and the number of the form qk^{2r+1} do not belong to this sequence, it follows that the number of numbers of the form (8), for definite value of $r=n$, is

$$\left[\frac{x}{k^{2n}}\right] - \left[\frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

By summing over all $n=0, 1, 2, \ldots$ we get for $K(x)$ the formula (2). The last term nonzero of the sum is $(-1)^s \left[\frac{x}{k^s}\right]$, where $s=\left[\frac{\log x}{\log k}\right]$.

Inserting

$$\left[\frac{x}{k^m}\right] = \frac{x}{k^m} - \delta_m, \qquad 0 \leqslant \delta_m < 1,$$

in the formula (2), we obtain by simple calculation the formula (3). Hence it follows immediately

$$K(x) \sim \frac{k}{k+1} x, \qquad x \to \infty.$$

Denoting by a_n the n-th term of the sequence (k), we get according to the last relation

$$K(a_n) \sim \frac{k}{k+1} a_n, \qquad x \to \infty.$$

Hence and from the formula $K(a_n)=n$ follows (4).

Finally to deduce (6) it is necessary to insert in the (2) $x=n$, n being given by (5). Then first we find

$$\left[\frac{n}{k^m}\right] = c_m + kc_{m+1} + \cdots + k^{r-m} c_r,$$

and then it is not difficult to deduce the formula (6).